**Bài toán**: Cho bảng số liệu về sự sinh trưởng của quần thể vi khuẩn Vibrio Natriegens( thực nghiệm) trong môi trường pH= 6.25 bằng máy quang phổ

*\*Thí nghiệm này là một dự án học kì của Deb Christensen trong đó một số quần thể V.natriegens được nuôi ở các giá trị pH khác nhau.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Thời gian | Chỉ số thời gian | Mật độ quần thể Bt | Sự thay đổi mật độ quần thể theo một đơn vị thời gian |
| 0 | 0 | 0.022 | 0.014 |
| 16 | 1 | 0.036 | 0.024 |
| 32 | 2 | 0.060 | 0.041 |
| 48 | 3 | 0.101 | 0.068 |
| 64 | 4 | 0.169 | 0.097 |
| 80 | 5 | 0.266 |  |

**Bảng 1.**

1. Xây dựng mô hình và thiết lập phương trình thể hiện sự tăng trưởng của quần thể V.natriegens
2. Tính mật độ quần thể vi khuẩn V.natriegens sau 2 giờ
3. Ước lượng tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn V.natriegens tại thời điểm 25 phút( tính từ lúc bắt đầu thí nghiệm)
4. Quần thể đạt tốc độ tăng trưởng (đơn vị mật độ/phút) sau khoảng bao lâu?

**Bài giải**

1. Các bước xây dựng một mô hình toán học từ số liệu thực nghiệm:

**Bước 1**: Mô hình toán học sơ bộ:

Quần thể vi khuẩn tăng nhanh khi được nuôi ở mật độ thấp, trong môi trường dinh dưỡng. Sự tăng số lượng khi các đơn bào phân chia vô tính thành 2 tế bào, sau đó 2 tế bào phân chia để tạo thành 4 tế bào…Thời gian cần thiết để 1 tế bào sinh trưởng và phân chia là gần như nhau đối với 2 tế bào bất kì

**Bước 2**: Kí hiệu t: thời gian( phút); Bt: Mật độ vi khuẩn tại thời điểm t

Tuy nhiên, dữ liệu được đọc theo bội số của 16 phút. Khi đó, thời gian được điều chỉnh lại sao cho t là 0,1,2,3,4,5.Ví dụ: B3 là mật độ vi khuẩn tai thời điểm 3x16=48 phút. Nói cách khác t: chỉ số thời gian T=16t với T: thời gian( phút)

**Bước 3**: Rút ra 1 phương trình biến động của quần thể( gọi tắt là phương trình động). Trong một số trường hợp, mô hình toán học có số liệu đầy đủ và có thể viết phương trình động trực tiếp từ mô hình. Tuy nhiên, đối với trường hợp đang xét, cần một số tính toán bổ sung và biểu đồ dữ liệu.

* Ba biểu đồ minh họa sự phát triển của vi khuẩn. Biểu đồ (A) vẽ cột 3 đối với cột2, biểu đồ(B) vẽ cột 4 đối với cột 2, biểu đồ (C) vẽ cột 4 đối với cột 3 từ bảng 1

Mật độ quần thể Bt

Trong 3 đồ thị, đồ thị (C) quan trọng hơn cả vì liên quan đến sự tăng trưởng vi khuẩn theo mật độ vi khuẩn. Bởi vì các điểm gần như nằm trên một đường thẳng nên dễ dàng có được phương trình mô tả mối quan hệ này

* Nhìn vào đồ thị(C), điểm thứ 5(B4; B5 - B4)=(0.169; 0.097) nằm dưới đường thẳng. Vì đường thẳng này quá gần với 4 điểm đầu tiên nên có ý kiến cho rằng, trong khoảng thời gian thứ 4, mức tăng trưởng B5 - B4 = 0.097, thấp hơn kì vọng; hoặc có thể B5 = 0.266 là sai số đo lường và lẽ ra phải lớn hơn. Tuy nhiên, đây là số liệu từ kết quả thí nghiệm thực tế và giá trị đo được: B5 = 0.266 phù hợp với dữ liệu còn lại ( trong bài viết có dẫn chứng đến một bảng số liệu để chứng minh cho sự tăng trưởng chậm lại của vi khuẩn sau t = 4(hoặc 64 phút)
* Độ dốc của đường thẳng trong đồ thị (C) là => phương trình của đường thẳng là . Ta sẽ chuyển phương trình dữ liệu thành phương trình động: Các điểm ở đồ thị( C) được biểu thị bằng x=Bt; y=Bt-1 – Bt cho t = 0,1,2,3,4. Thế x và y vào phương trình ta được phương trình (1) Bt-1 – Bt =
* Phương trình (1) mô tả quá trình sinh học trong đó cho biết mức tăng trưởng trong khoảng thời gian thứ t là Bt. Con số được gọi là tốc độ tăng trưởng tương đối.

**Bước 4:** Hoàn thiện mô hình toán học sơ bộ ở bước 1

Một phần cố định của các tế bào phân chia theo từng khoảng thời gian(Trong trường hợp này số tế bào phân chia cứ sau mỗi 16 phút)

**Bước 5:** Tính nghiệm của phương trình động

Phương trình (1) chỉ ra sự thay đổi trong mật độ vi khuẩn( Bt-1 -Bt) từ t đến t+1. Để cho hiệu quả, yêu cầu 1 giá trị ban đầu B0. Gỉa định điểm dữ liệu ban đầu B0 = 0.022 là điểm tham chiếu.

* Sẽ thuận tiện hơn khi thay đổi phương trình (1) thành 1 phương trình mà ta gọi là phương trình lặp

B t-1 – Bt = Bt <=> Bt+1 = Bt

* Phương trình lặp là viết tắt của ít nhất 5 phương trình

B1 = B0 B2 = B1 B3 = B2 B4 = B3 B5 = B4

Khi đó B1 = B0

B2 = B1= B0

………

Do đó dạng tổng quát là Bt = B0 (2)

* Các quần thể có mức tăng trưởng được mô tả bằng phương trình có dạng Pt = P0. (R>1)

Phương trình (2) được viết lại dưới dạng thời gian T:

BT = 0.022 ( = 0.022. (3)

* Từ phương trình (3), ta tính được giá trị và đối chiếu chúng với các giá trị thực nghiệm, ta thấy có một sự trùng khớp giữa hai giá trị này ngoại trừ phép đo cuối cùng(T = 80 phút).
* Tuy nhiên, nếu bỏ qua hiệu ứng của sự đông đúc của các tế bào hoặc ô nhiễm môi trường hoặc vòng đời của tế bào bắt đầu xuất hiện sau hơn 1 giờ thí nghiệm thì mô hình toán học xem như vẫn đúng.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **pH = 6.25** | | | |
| **Thời gian (phút)** | **Chỉ số thời gian** | **Mật độ quần thể (thực nghiệm)** | **Mật độ quần thể**  **(tính toán từ phương trình (3))** |
| 0 | 0 | 0.022 | 0.022 |
| 16 | 1 | 0.036 | 0.037 |
| 32 | 2 | 0.060 | 0.061 |
| 48 | 3 | 0.101 | 0.102 |
| 64 | 4 | 0.169 | 0.17 |
| 80 | 5 | 0.266 | 0.283 |

Chỉ số thời gian, t

**Biểu đồ so sánh giá trị thực nghiệm và giá trị tính toán**

“Đáp án câu a được dịch và biên soạn dựa trên tài liệu từ <[link](https://math.libretexts.org/Under_Construction/Stalled_Project_(Not_under_Active_Development)/Book%3A_Calculus_for_the_Life_Sciences_-_A_Modeling_Approach_Volume_1_(Cornette_and_Acherman)/01%3A_Mathematical_Models_of_Biological_Processes/1.01%3A_Section_1-)> sau đây”